Forte n-supercyclicité

ERNST Romuald

21 Octobre 2011

1 Motivations

Sommaire

Définition (Feldman, 2002)

Un opérateur T est n-supercyclique, $n \geq 1$, si X possède un sous espace vectoriel de dimension n dont l'orbite par T est dense dans X.

Définition (Feldman, 2002)

Un opérateur T est n-supercyclique, $n \geq 1$, si X possède un sous espace vectoriel de dimension n dont l'orbite par T est dense dans X.

Définition (Shkarin, 2008)

Un opérateur T est fortement n-supercyclique, $n \geq 1$, si X possède un sous espace vectoriel de dimension n tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k(L)$ est de dimension n et son orbite est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$. L'ensemble des sous espaces fortement n-supercyclique pour T est noté $\mathcal{ES}_n(T)$.

Définition (Feldman, 2002)

Un opérateur T est n-supercyclique, $n \geq 1$, si X possède un sous espace vectoriel de dimension n dont l'orbite par T est dense dans X.

Définition (Shkarin, 2008)

Un opérateur T est fortement n-supercyclique, $n \geq 1$, si X possède un sous espace vectoriel de dimension n tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k(L)$ est de dimension n et son orbite est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$. L'ensemble des sous espaces fortement n-supercyclique pour T est noté $\mathcal{ES}_n(T)$.

Théorème (Shkarin, 2008)

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{E}\mathcal{S}_n(T) = \mathcal{E}\mathcal{S}_n(T^k)$. En particulier, T est fortement n-supercyclique si et seulement si T^k est fortement n-supercyclique.

• Comment caractériser la forte n-supercyclicité d'une façon plus maniable ?

- Comment caractériser la forte n-supercyclicité d'une façon plus maniable ?
- La n-supercyclicité et la forte n-supercyclicité sont-elles équivalentes ?

• Comment caractériser la forte n-supercyclicité d'une façon plus maniable ?

• La n-supercyclicité et la forte n-supercyclicité sont-elles équivalentes ?

• Si oui, quels nouveautés apporte cette nouvelle vision ?

• Si non, quelles sont les propriétés des opérateurs de cette nouvelle classe ?

- Comment caractériser la forte n-supercyclicité d'une façon plus maniable ?
- La n-supercyclicité et la forte n-supercyclicité sont-elles équivalentes ?
- Si oui, quels nouveautés apporte cette nouvelle vision ?
- Si non, quelles sont les propriétés des opérateurs de cette nouvelle classe ?
- Quel lien existe-t-il entre la forte n-supercyclicité et la forte $((n+1)$-supercyclicité ?

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *T est fortement n-supercyclique ;*

(ii) *Il existe un sous espace L de X de dimension n tel que : $\cup_{i=1}^{\infty} T^i(L) \times \cdots \times T^i(L)$ est dense dans X^n.*

Remarque

En particulier, si $T := T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ est un opérateur fortement k-supercyclique sur $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, T_i est fortement k_i-supercyclique où $k_i = \min(\dim(X_i), k)$.

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *T est fortement n-supercyclique ;*

(ii) $\forall U \subset \mathbb{P}_n(X), \forall V \subset X^n$ *ouverts non-vides,*
$\exists i \in \mathbb{N} : \ (\oplus_{k=1}^n T)^i(\pi_n^{-1}(U)) \cap V \neq \emptyset.$

De plus, $\mathcal{E}S_n(T)$ est un G_δ dense de $\mathbb{P}_n(X)$.

Sommaire

Théorème (Bourdon,Feldman,Shapiro, 2004)

Soit $n \geq 2$, il n'existe pas d'opérateur k-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq k < n$.

Théorème (Bourdon,Feldman,Shapiro, 2004)

Soit $n \geq 2$, il n'existe pas d'opérateur k-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq k < n$.

Théorème

Soit $n \geq 3$, il n'existe pas d'opérateur fortement k-supercyclique sur $\mathbb{R}^n$ avec $1 \leq k < n$.

Théorème (Bourdon,Feldman,Shapiro, 2004)

Soit $n \geq 2$, il n'existe pas d'opérateur k-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq k < n$.

Théorème

Soit $n \geq 3$, il n'existe pas d'opérateur fortement k-supercyclique sur $\mathbb{R}^n$ avec $1 \leq k < n$.

Sommaire

Corollaire

Soit S un opérateur qui vérifie le critère d'hypercyclicité sur un espace de Banach Y. Alors, l'opérateur $T = Id \oplus S$ on $X = \mathbb{K}^n \oplus Y$ est fortement k-supercyclique si et seulement si $k \geq n$.

Théorème

Soit X un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle normalisée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour lesquels l'opérateur de décalage à droite sur $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est continu. Alors, il existe un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement p-supercyclique pour $p \geq 2$.

Sommaire

Théorème (Bourdon, Feldman, Shapiro, 2004)

Si T est n-supercyclique, alors T^* possède au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité.

Théorème

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}^*$, $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$ et T un opérateur sur un espace de Banach X et $n = \sum_{i=1}^{p} m_i$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $S := \oplus_{i=1}^{m_1} \lambda_1 Id \oplus \cdots \oplus_{i=1}^{m_p} \lambda_p Id \oplus T$ *est fortement n-supercyclique sur* $\mathbb{C}^n \oplus X$ *;*

(ii) $\oplus_{i=1}^{m_1} \frac{T}{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus_{i=1}^{m_p} \frac{T}{\lambda_p}$ *est hypercyclique.*

De plus, $\sigma_p(S^*) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, λ_i est de multiplicité m_i.

Théorème (Feldman, 2002, The Circle Theorem)

Si T est un opérateur n-supercyclique, alors il existe n cercles $\Gamma_i = \{z : |z| = r_i\}$, $r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tels que toute composante du spectre de T intersecte $\cup_{i=1}^{n} \Gamma_i$.

Théorème (Feldman, 2002, The Circle Theorem)

Si T est un opérateur n-supercyclique, alors il existe n cercles $\Gamma_i = \{z : |z| = r_i\}$, $r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tels que toute composante du spectre de T intersecte $\cup_{i=1}^{n} \Gamma_i$.

Théorème

Soit T un opérateur fortement n-supercyclique sur un espace de Banach X. Alors, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

• Il existe $R \geq 0$ tel que toute composante du spectre de T intersecte le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$,

• Il existe deux sous espaces vectoriels F de dimension $\leq n$ et X_0 T-stables tels que $X = F \oplus X_0$ et il existe $R \geq 0$ tel que toute composante du spectre de $T_0 := T_{|X_0}$ intersecte le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. De plus, $T_{|F}$ est un opérateur diagonal.

Théorème

Soit T un opérateur fortement 2-supercyclique sur un espace de Banach X. Alors, l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- *Il existe $R \geq 0$ tel que toute composante du spectre de T intersecte le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$,*
- $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ *avec S supercyclique.*
- $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$ *avec $\frac{S}{a} \oplus \frac{S}{b}$ hypercyclique.*

Merci de votre attention ! ! !