**Dénombrement**

Avant de pouvoir sereinement étudier les probabilités, il est nécessaire de bien savoir compter. Cette phrase d'introduction, bien que provocatrice, est on ne peut plus vraie. En effet, dans un grand nombre de situations en probabilités, il nous sera demandé de compter ou dénombrer les cas qui nous sont favorables et/ou ceux qui nous sont défavorables dans le cadre d'une expérience. C'est un premier pas vers le calcul des probabilités.

# 1 Un tout petit peu de théorie des ensembles

On s'intéresse à un ensemble $\Omega$ qui représente en général tous les cas possibles de ce que l'on étudie.

**Exemple 1.**

On note en majuscule les *évènements* $A$, $B$, $C$..., ce sont des ensemble contenus dans $\Omega$. Un ensemble de $\Omega$ peut parfois être représenté par une propriété.

**Exemple 2.**

Ce qui va nous intéresser dans la suite c'est de déterminer le nombre d'éléments présents dans $A$. On appelle ceci le *cardinal* de $A$ et on le notera:

$$|A| \text{ ou } Card(A).$$

Lorsqu'on travaille avec des ensembles, on a certaines façon de les faire interagir entre-eux. On peut par exemple s'intéresser aux ensembles suivants:

- $A \cap B$: c'est l'ensemble qui contient les éléments qui sont à la fois dans $A$ **ET** dans $B$. On lit $A$ inter $B$.
- $A \cup B$: c'est l'ensemble qui contient les éléments qui sont dans $A$ **OU** dans $B$ (ou dans les deux). On lit $A$ union $B$.
- $\overline{A}$: c'est l'ensemble qui contient les éléments de $\Omega$ qui ne sont pas dans $A$. On lit contraire de $A$.
- $\emptyset$: c'est l'ensemble qui ne contient rien.

**Exemple 3.** Soit $\Omega$ l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit $A$ ="Les cartes rouges" et $B$ ="Les cartes avec un personnage".

Quelques formules qui se retrouvent sur un dessin:

| | | |
|---|---|---|
| $A \cap \emptyset =$ | $A \cup \emptyset =$ | $A \cap (B \cup C) =$ |
| $A \cap \Omega =$ | $A \cup \emptyset =$ | $A \cup (B \cap C) =$ |
| $A \cap A =$ | $A \cup A =$ | |
| $A \cap B =$ | $A \cup B =$ | |
| $\overline{A \cap B} =$ | $\overline{A \cup B} =$ | |
| $A \cap \overline{A} =$ | $A \cup \overline{A} =$ | |

Et enfin si $B \subset A$, alors

$$A \cap B = \qquad \text{et} \qquad A \cup B = \qquad .$$

**Exemple 4.** Soit $\Omega$ l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit $A =$"Les cartes rouges" et $B =$"Les cartes avec un personnage".
Exprimer en termes de théorie des ensembles les événements suivants:

- Les cartes qui sont soit des personnages soit des cartes rouges.
- Les cartes qui sont rouges mais qui ne sont pas des personnages.
- les cartes qui représentent un personnage noir.
- les cartes qui sont soit rouges soit un personnage qui n'est pas noir.
- les cartes qui sont un as rouge et un personnage.

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles $A$ et $B$ sont *disjoints* ou que les évènements $A$ et $B$ sont *incompatibles*.

Après avoir défini tout ce vocabulaire, il est maintenant temps de s'intéresser aux calculs des cardinaux.

## 2 Propriété de la somme

Une remarque élémentaire mais qui est à la base de nombreuses choses est que si deux évènements $A$ et $B$ sont incompatibles, alors il est très facile de connaitre le cardinal de $A \cup B$. En effet, on appelle cette propriété la *propriété de la somme*:

$$\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles, alors } Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B).$$

Par contre dans le cas où les évènements ne sont pas incompatibles, la formule ci-dessus n'est plus valable; il faut alors utiliser la formule suivante:

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B).$$

**Exemple 5.** Soit $\Omega$ l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit $A =$"Les cartes rouges" et $B =$"Les cartes avec un personnage".
$Card(A) =$ , $Card(B) =$ , $Card(A \cap B) =$ et $Card(A \cup B) =$ .

## 3 Le principe de multiplication

Lorsqu'on effectue une expérience qui consiste elle-même en plusieurs sous-expériences (par exemple on note les résultats de 10 lancers de dé consécutifs ou on regarde les notes du dernier contrôle), on peut résumer l'expérience comme ceci:

on effectue l'expérience numéro 1 dont l'ensemble des résultats possibles est $\Omega_1$.

on effectue l'expérience numéro 2 dont l'ensemble des résultats possibles est $\Omega_2$.

on effectue l'expérience numéro 3 dont l'ensemble des résultats possibles est $\Omega_3$.

$\vdots$

on effectue l'expérience numéro $p$ dont l'ensemble des résultats possibles est $\Omega_p$.

Un résultat possible de mon expérience est donc quelque chose de la forme $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ où chaque $\omega_i$ est le résultat de la sous-expérience numéro $i$.

On note $\Omega$ l'ensemble des résultats possibles de notre expérience à condition que nos sous-expériences soient toutes **indépendantes**, on a

$$Card(\Omega) = Card(\Omega_1) \times Card(\Omega_2) \times \ldots \times Card(\Omega_p).$$

Ce type de situation est très souvent représenté par un arbre.

**Exemple 6.**

- Compter le nombre de plaques d'immatriculation différentes qu'il est possible de faire avec un format: 4 chiffres-2 lettres-2 chiffres.

- Même question avec le format actuel: 2 lettres-3 chiffres-2 lettres.

- J'ai dans mon sac de voyage: 4 paires de chaussettes, 5 caleçons, 2 jeans et 3 tee-shirts. Combien y-a-t-il de façons différentes de m'habiller?

- Et si en plus j'ai une casquette mais j'ai le choix entre la mettre ou non.

## 4 Listes et arrangements (l'ordre est important)

Dans toute cette partie, on notera $n$ le nombre d'éléments de $\Omega$ pour des commodités d'écriture.

### 4.1 Listes

On appelle *liste* de $p$ éléments de $\Omega$ une **suite ordonnée** constituée de $p$ éléments de $\Omega$ **non nécessairement distincts**.

**Exemple 7.** Si l'on prend pour $\Omega$ l'ensemble des lettres de l'alphabet, alors $COURS$ est une liste de longueur 5 et $TRGFR$ en est une autre.

Si $\Omega$ est l'ensemble des personnes qui ont acheté un carton de quine (ou bingo), alors une liste de longueur 3 est donnée par le nom des gagnants des trois premiers lots dans l'ordre.

Une liste de longueur $p$ est donc le résultat d'une expérience qui comporte les $p$ sous-expériences suivantes:

on choisit le numéro 1 de la liste parmi les éléments de $\Omega$.

on choisit le numéro 2 de la liste parmi les éléments de $\Omega$.

on choisit le numéro 3 de la liste parmi les éléments de $\Omega$.

$\vdots$

on choisit le numéro $p$ de la liste parmi les éléments de $\Omega$.

On en conclut d'après le principe de multiplication que le nombre de listes de longueur $p$ de $\Omega$ vaut $Card(\Omega)^p = n^p$.

**Exemple 8.** Pour $\Omega$ l'ensemble des lettres de l'alphabet. On note $A$ l'ensemble des mots (au sens liste pas au sens littéraire) de longueur 3. Trouver le cardinal de $A$. Pareil avec $B$ qui est l'ensemble des mots de longueur 6 commençant par la lettre $Y$.

Si $\Omega$ est l'ensemble des personnes qui ont acheté un carton de quine (ou bingo) et qu'il y avait 100 personnes, déterminer le nombre de podiums de gagnants possibles.

Une usine fabrique des calendriers de l'avent. Pour cela elle dispose de 20 types de chocolats différents et on rempli le calendrier au hasard avec les chocolats. Calculer le nombre de calendriers différents qu'il est possible de fabriquer.

### 4.2 Arrangements

On appelle *arrangement* de $p$ éléments de $\Omega$ une **suite ordonnée** constituée de $p$ éléments de $\Omega$ **TOUS distincts**.

**Exemple 9.** Si l'on prend pour $\Omega$ l'ensemble des lettres de l'alphabet, alors $COURS$ est aussi un arrangement de longueur 5 mais $TRGFR$ n'en est pas un car on répète la lettre $R$.

Si $\Omega$ est l'ensemble des personnes qui ont acheté un carton de quine (ou bingo), alors une liste de longueur 3 est donnée par le nom des gagnants des trois premiers lots dans l'ordre à condition que l'on n'ai pas le droit de cumuler les lots.

Un arrangement de longueur $p$ est donc le résultat d'une expérience qui comporte les $p$ sous-expériences suivantes:

on choisit le numéro 1 de l'arrangement parmi les éléments de $\Omega$.

on choisit le numéro 2 de l'arrangement parmi les éléments de $\Omega$ sauf le numéro 1.

on choisit le numéro 3 de l'arrangement parmi les éléments de $\Omega$ sauf les numéros 1 et 2.

$\vdots$

on choisit le numéro $p$ de l'arrangement parmi les éléments de $\Omega$ sauf les numéros 1,2,...,$p-1$.

On en conclut d'après le principe de multiplication que le nombre d'arrangements de longueur $p$ de $\Omega$ vaut $A_n^p := n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-2)) \times (n-(p-1))$.

**Remarque 1.** Le nombre $A_n^p$ est important dans beaucoup de situations, il est donc très important de savoir le calculer. Pour cela, on utilise souvent une autre notation qui est le *factoriel*:

$$n! := n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

On lit $n$ factoriel. Avec cette nouvelle notation, on peut aussi écrire que

$$A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!}.$$

**Exemple 10.** Pour $\Omega$ l'ensemble des lettres de l'alphabet. On note $A$ l'ensemble des mots (au sens liste pas au sens littéraire) de longueur 3. Trouver le cardinal de $A$. Pareil avec $B$ qui est l'ensemble des mots de longueur 6 commençant par la lettre $Y$.

Si $\Omega$ est l'ensemble des personnes qui ont acheté un carton de quine (ou bingo) et qu'il y avait 100 personnes, déterminer le nombre de podiums de gagnants possibles.

Si $\Omega$ est l'ensemble des finalistes du 100 mètres aux J.O. de 2016 (huit participants pour les non-sportifs!), calculer le nombre de podiums possibles.

### 4.3 Le cas particulier des permutations

Lorsqu'on veut faire un arrangement à $n$ éléments dans un ensemble $\Omega$ qui lui même $n$ éléments, on appelle cela une *permutation*.

La formule donnée dans la section précédente se simplifie alors puisque le nombre de façon de ranger les $n$ éléments de $\Omega$, c'est à dire le nombre de permutations est:

$$A_n^n = n!.$$

**Exemple 11.** Ce soir, je participe à une compétition multi-sports. Je dois disputer 3 matchs dans 3 disciplines différentes. Combien y-a-t-il de possibilités d'ordre pour disputer les matchs (foot-volley-hand, foot-hand-volley,...)?

A la fin de l'année, nous établissons un classement des élèves de la classe en fonction des résultats. Combien y-a-t-il de possibilités de classement différentes?

Au cinéma, 100 personnes vont dans une salle qui comporte 100 places. Combien y-a-t-il de possibilités de placement différentes?

Trouver le nombre d'anagrammes du mot $COURS$. (les mots formés peuvent ne pas exister dans le dictionnaire!)

# 5 Combinaisons (l'ordre n'est pas important)

Nous avons vu dans la partie précédente que la différence entre liste et arrangement est le droit de répéter les éléments ou non. Il existe la même subtilité au niveau des combinaisons. La encore, on notera $n$ le nombre d'éléments de $\Omega$ pour des commodités d'écriture.

## 5.1 Combinaisons (sans répétitions)

On appelle combinaison de $p$ éléments de $\Omega$ toute partie de $\Omega$ qui contient exactement $p$ éléments. Notez qu'il n'y a aucune notion de classement ici (pas de premier élément, deuxième,...).

**Exemple 12.** Dans la classe, le groupe de T.P.2 est une combinaison à 11 éléments des élèves de la classe.

Sur un terrain de foot, l'équipe bleue forme une combinaison à 11 éléments des joueurs sur le terrain.

A l'Université, la présidence de l'université forme une combinaison à 2 éléments de l'ensemble des personnels de l'université. Par contre, si l'on classe cette combinaison en fonction des responsabilités de façon décroissante, on obtient l'arrangement Président, Vice-président.

Il est assez rapide de remarquer que l'on peut se servir de la formule du nombre d'arrangement et de celle du nombre de permutations pour trouver la formule du nombre de combinaisons. On obtient note le nombre de combinaisons de $p$ éléments parmi $n$ $\binom{n}{p}$ et on a:

$$\binom{n}{p} := \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

**Exemple 13.** Je veux faire faire un exposé à un groupe de deux élèves de la classe. Combien y-a-t-il de possibilités pour choisir ce groupe de deux élèves?

Une usine fabrique des pochettes surprises. Pour cela elle dispose aujourd'hui de 20 jouets différents et on met dans une pochette surprise 5 jouets différents choisis au hasard. Calculer le nombre de pochettes différentes qu'il est possible de fabriquer.

Combien y-a-t-il de façon de former deux groupes de T.P. dans une classe de 16 élèves?

On dispose d'un jeu de 32 cartes. Calculer le nombre de mains de 8 cartes possibles sans aucun as.

**Remarque 2.** Il est bon de connaitre les relations suivantes qui épargnent des calculs en pratique:

- Pour tout entier $n$, on a
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$
- Pour tout entier $n$ non-nul, on a
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$
- Pour tout entiers $n$ et $0 \leq k \leq n$, on a
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
- Si $n > k$, alors
$$\binom{n}{k} = 0.$$

### 5.2 Combinaisons avec répétitions

Les combinaisons avec répétitions sont en général moins utilisées mais peuvent parfois se révéler utiles. Une combinaison avec répétition à $p$ éléments est une partie de $\Omega$ où l'on s'autorise à prendre plusieurs fois les éléments pour en obtenir $p$ au final.

**Exemple 14.** J'ai quatre boites de stylos dans mon bureau, des bleus, des noirs, des rouges. J'ai amené trois stylos avec moi en cours, combien y-a-t-il de possibilités de couleurs pour ces trois stylos?

Je jette trois dés indiscernables en même temps. Quel est le nombre de tirages possibles?

Combien y-a-t-il de dominos dans un jeu de dominos?

Combien y-a-t-il de façons de ranger 12 stylos identiques dans 3 boites différentes?

Le nombre de combinaisons avec répétitions à $p$ éléments peut aussi s'interpréter comme le nombre de façon de ranger $p$ objets identiques dans $n$ rangements. Le nombre de combinaisons avec répétition est:
$$\binom{n+p-1}{p}.$$

**Exemple 15.** Répondre aux questions de l'exemple précédent.

## 6 Bilan

Deux notions essentielles ont été abordées dans ce cours, celle de répétition et celle d'ordre. Illustrons ceci sur un exemple récapitulatif:

Lorsqu'on tire des boules d'une urne, on a le choix entre faire des tirages avec remise ou sans remise et tenir compte de l'ordre dans lequel les boules ont été tirées ou non. Lors d'un tirage de $p$ boule d'une urne qui en contenait $n$, on obtient le tableau suivant:

| Tirages | Ordonné | Non-ordonné |
|---|---|---|
| Sans remise | | |
| Avec remise | | |

Pour calculer le nombre de façons de ranger $p$ objets dans $n$ cases, on a besoin de savoir si les objets sont discernables ou non et si l'on peut en ranger plusieurs ensembles.

| Objets | Discernables | Indiscernables |
|---|---|---|
| Un seul objet par case | | |
| Éventuellement plusieurs objets par case | | |

## 7 Introduction aux probabilités

La notion de probabilité est une notion mathématique qui permet de mesurer les chances qu'un certain évènement se produise. On utilise souvent cette notion pour résoudre des problèmes concrets. Il faut pour cela être capable de passer du cas concret à la formulation mathématique rigoureuse du problème concret. C'est ce que l'on appelle la modélisation du problème.

### 7.1 Modélisation et vocabulaire

Pour pouvoir calculer la probabilité d'un évènement concret, il faut au préalable disposer de plusieurs informations.
Prenons par exemple le lancer d'un dé cubique non-truqué. Tout le monde sait que l'on a une chance sur 6 de sortir le chiffre 1 par exemple, cela parait presque évident. Mais comment avons nous fait?

- En premier lieu, nous avons compté le nombre de faces pour savoir quelles étaient les possibilités de résultats (ou **issues** en langage mathématique). Cette étape est la première de la modélisation et permet de comprendre ce qu'il peut se passer. Toutes les issues possibles sont regroupées dans un ensemble $\Omega$ que l'on appelle l'**univers** (des possibles).

  Dans notre exemple, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Cette étape est très importante et doit faire disparaitre tout un tas de facteurs qui ne nous intéressent pas en théorie.

Par exemple, je n'ai pas inclus dans l'univers la possibilité que le dé soit "cassé" ou que le dé tombe dans une bouche d'égout ou encore que le dé reste en équilibre sur un de ses sommets. Ces cas là doivent être éliminés car ils ne correspondent pas à ce à quoi l'on pense lorsqu'on fait un lancer de dé.

- On définit ensuite un *évènement* comme étant une partie de l'univers.

  Par exemple l'évènement concret "Obtenir un nombre pair" est vu mathématiquement comme l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ (rien de bien sophistiqué!!).

- On a également besoin dans de nombreux cas de la notion de **variable aléatoire**. On dit que $X$ est une variable aléatoire si c'est une fonction qui dépend de l'issue de l'expérience. En général, c'est la valeur de cette fonction qui nous intéresse en pratique.

  Par exemple, si l'on joue aux petits chevaux, je lance le dé pour savoir de combien de cases je vais avancer. Je vais donc choisir que $X$ est le résultat du lancer de dé. Dans le cas où j'aurai parié avec un ami que si le résultat est 6, il me donne 10 euros et que si ce n'est pas 6 alors je lui donne 2 euros, on choisira que $X$ représente mon gain le lancer de dé, c-à-d $X = 10$ si je fais 6 avec le dé et $X = -2$ si je ne fais pas 6.

- On appelle alors **loi de probabilité** de la variable aléatoire $X$, la liste des probabilités des issues de l'expérience.

  Par exemple, pour un lancer de dé, si $X$ est la variable aléatoire qui donne le résultat du dé, la loi de probabilité de $X$ est donnée par le tableau suivant:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

  **Remarque 3.** Cette dernière définition est valable pour ce que l'on appelle les variables aléatoire discrètes, on verra une autre définition un peu plus tard pour les variables continues.

**Remarque 4.** On a toujours les relations suivantes:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Pour un évènement $A$,
$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

## 7.2 Probabilités conditionnelles

On est souvent amené dans la réalité à calculer des probabilités puis à devoir recalculer ces mêmes probabilités car la situation a changée entre temps.

**Exemple 16.** Si vous aimez parier sur les match de rugby, vous pouvez parier sur le match Toulon-Clermont-Ferrand. Soit $T$ l'événement "Toulon gagne" et $C$ l'évènement "Clermont-Ferrand gagne".

Au début du match, on peut par exemple avoir: $\mathbb{P}(C) = 0,75$.
Cependant, à la fin de la première mi-temps, le score est de 35-0 pour Clermont. On peut alors recalculer $\mathbb{P}(C)$ en tenant compte de cette nouvelle information. C'est ce que l'on appelle faire des probabilités conditionnelles, on calcule la probabilité que Clermont gagne sachant qu'ils mènent 35-0 à la mi-temps.

### 7.2.1 Probabilité de $A$ sachant $B$

Soient $A$ et $B$ deux évènements, l'évènement $B$ étant de probabilité non-nulle. La *probabilité de l'évènement $A$* **sachant** *l'évènement $B$* est notée $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A|B)$. On peut la calculer grâce à la formule:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Exemple 17.** Notons $S$ l'évènement "Clermont mène 35-0' à la mi-temps". Au début du match entre Toulon et Clermont, on évaluait: $\mathbb{P}(S) = 0,1$, $\mathbb{P}(C) = 0,75$, $\mathbb{P}(S \cap C) = 0,095$ et $\mathbb{P}(T) = 0,2$.

Sachant qu'à la mi-temps le score est de 35-0 pour Clermont, calculer la probabilité que Clermont gagne.

### 7.2.2 Évènements indépendants

En pratique, deux évènements sont **indépendants** s'ils n'ont aucune "influence" l'un sur l'autre.

En probabilité, on traduit cela en disant que deux évènements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

### 7.2.3 Formule des probabilités totales

Si $A$ est un évènement de probabilité non-nulle et différente de 1, alors pour tout évènement $B$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{A}).$$

**Exemple 18.** Je possède deux dés truqués. Le premier sort un 6 avec une probabilité de 0,5. Le second sort un six avec une probabilité de 0,2. Je choisis un des deux dés au hasard puis je le jette. Quelle est la probabilité de l'évènement $G$:"sortir un 6"?

## 7.3 Variables discrètes et variables continues

Il existe deux grands types de variables aléatoires:

- Les **variables aléatoires discrètes**. Ce sont des variables qui peuvent prendre un nombre fini de valeurs ou qui ne prennent que des valeurs entières.

  **Exemple 19.** La variable aléatoire $X$ qui donne le nombre de points marqués par une équipe lors d'un match.
  La variable qui donne le résultat d'une "Pile ou Face".
  La variable aléatoire qui donne le nombre de bonnes réponses à un QCM.

- Les **variables aléatoires continues**. Ce sont des variables qui peuvent prendre comme valeurs tous les nombres réel d'un certain intervalle de $\mathbb{R}$.

  **Exemple 20.** La variable aléatoire $X$ qui donne la taille d'une personne.
  La variable qui donne la distance parcourue en une journée par une personne.
  La variable aléatoire qui donne la quantité de pluie tombée en un mois à Digne.

# 8 Les variables discrètes

## 8.1 Espérance, Variance, Écart-type d'une variable discrète

Si $X$ est une variable aléatoire discrète sur l'ensemble $\Omega := \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ dont la loi est donnée par: $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$, alors **l'espérance** est donnée par:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

La **variance** est:

$$V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 - (E(X))^2.$$

L'écart-type est:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

## 8.2 Loi équirépartie

On dit que l'on est en situation **d'équiprobabilité** lorsque chaque issue à la même probabilité d'apparition. Dans ce cas, si l'on considère la variable aléatoire $X$ sur $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$ qui donne le résultat de l'expérience, on dit alors que la variable est **équirépartie**.

**Exemple 21.** C'est le cas par exemple lorsqu'on s'intéresse:

- au lancer d'un dé non truqué
- au lancer d'une pièce non-truquée
- au tirage d'une boule au loto

Par contre ce n'est pas le cas pour:

- le sexe d'un bébé qui va naitre
- l'issue d'un match de tennis entre Federer et Gasquet
- le lancer d'un chat

En cas d'équiprobabilité, le calcul de la probabilité d'un évènement $A$ se ramène tout simplement au calcul suivant:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas total}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(X = x_2) = \ldots = \mathbb{P}(X = x_n) = \frac{1}{n}.$$

**Exemple 22.**

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit $A =$"Les cartes rouges" et $B =$"Les cartes avec un personnage". Calculer la probabilité que la carte tirée soit un personnage rouge! Un personnage pas rouge?

- Calculer la probabilité que la plaque d'immatriculation de ma voiture soit QL-248-IO.

Pour une loi équirépartie,

$$E(X) = \qquad \text{et} \qquad V(X) =$$

## 8.3 Loi de Bernoulli et loi binomiale

Un expérience de Bernoulli est une expérience à deux issues (succés ou echec, blanc ou pas blanc, 0 ou 1, pair ou impair...) dont les probabilités respectives sont $p$ et $1-p$. Si $X$ est l'issue de cette expérience, on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour dire que $X$ suit une loi de Bernoulli.

**Exemple 23.**

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On souhaite tirer un cœur. La variable aléatoire $X$ vaut 1 si la carte tirée est un carreau et 0 sinon. Quelle est la loi de $X$?
- Je lance un dé et je souhaite avoir un nombre inférieur ou égal à 2. Soit $X$ aléatoire qui vaut 1 si $X \leq 2$ et 0 sinon. Quelle est la loi de $X$?

Lorsqu'on effectue $n$ fois la même expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de façon indépendante et que l'on choisit que $X$ vaut le nombre de "Succès" aux expériences, on dit que $X$ suit une **Binomiale de paramètres** $p$ **et** $n$, on note $\mathcal{B}(p, n)$. $X$ peut donc prendre n'importe quelle valeur $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

**Exemple 24.** On lance 5 fois une pièce de monnaie équilibrée et on compte le nombre de "Pile".

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p, n)$ et si $k = 0, 1, \ldots, n$, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

De plus,

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p).$$

**Exemple 25.** Calculer la probabilité de faire 4 fois "Pile" en lançant une pièce de monnaie 8 fois.

## 8.4 Loi de Poisson

Une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ est une loi qui, en pratique, sert à estimer la probabilité qu'un fait qui se produit en moyenne $\lambda$ fois en un laps de temps donné, se produise un certain nombre de fois dans ce même laps de temps.

**Exemple 26.** Dans une entreprise, une machine a tendance à tomber en panne 1 fois par semaine en moyenne. Je peux me demander quelle est la probabilité que ce mois-ci elle ne tombe pas en panne?

Une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour tout nombre entier $k$, on a:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

**Exemple 27.** Calculer la probabilité que ce mois-ci la machine de l'exemple précédent ne tombe pas en panne. Ne tombe en panne qu'une fois.

De plus,

$$E(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda.$$

# 9 Les variables continues

On a vu dans le cas des variables discrètes que la loi d'une variable aléatoire est donnée par le calcul de $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tous les $i$. Dans le cas des variables continues, ce type de calcul n'a pas d'intérêt. En effet, si $X$ est une variable aléatoire continue, alors pour toute valeur $x$, on a:

$$\mathbb{P}(X = x) = 0.$$

**Exemple 28.** Je cherche à couper un bâton d'une longueur totale de 1m. Je considère la variable aléatoire $X$ qui mesure à quelle distance en partant de la gauche j'ai coupé le bâton et je considère que j'ai autant de chances de couper le bâton à tous les endroits. $X$ est donc une variable aléatoire continue car elle peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1. Quelle est la probabilité de couper le bâton exactement au milieu?

## 9.1 Fonction de répartition d'une variable continue

Comme on vient de voir qu'il est inutile de calculer $\mathbb{P}(X = x)$, on va s'intéresser à $\mathbb{P}(X \leq x)$.

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire $X$ la fonction

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

**Exemple 29.** On a vu qu'il est impossible de couper le bâton exactement au milieu. Par contre, comme j'ai autant de chances de couper le bâton à tous les endroits, je sais que

$$F_X(0,5) = \mathbb{P}(X \leq 0,5) =$$

## 9.2 Loi exponentielle

Nous allons commencer par nous intéresser à la loi exponentielle. En pratique, cette loi s'applique aux objets dont la durée de vie restante ne dépend pas de leur âge actuel.

**Exemple 30.** Le diamant est un bon exemple d'un tel phénomène. Celui-ci ne peut pas être abimé par le temps ou l'usure, il reste intact ou bien se casse. La probabilité que le diamant que vous venez d'acheter chez le bijoutier se casse avant 2020 est la même que la probabilité qu'un diamant qui est sur un bijou depuis 200 ans se casse avant 2020 lui aussi. Évidemment ceci n'est pas vrai pour un pneu ou la peinture de votre voiture car ceux-ci sont soumis à l'usure.

On dit qu'une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si la fonction de répartition de $X$ est la suivante:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On connait aussi son espérance et sa variance:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### 9.3 Loi Normale centrée réduite

La loi normale modélise en général assez bien les phénomènes naturels provoqués par une successions d'évènements aléatoires. C'est une des raisons qui expliquent que la loi normale est omniprésente dans la nature et en statistiques.

Un des problèmes les plus gênants concernant cette loi est qu'il est impossible de trouver une formule mathématique qui permette de calculer la fonction de répartition de cette loi.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ lorsqu'une variable aléatoire suit une loi normale centrée réduite. Son espérance et sa variance:

$$E(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1.$$

Cependant en pratique, pour utiliser la loi normale, on a recours à une table qui répertorie certaines valeurs de la fonction de répartition que l'on note en général $\Pi$.

**Exemple 31.** Trouver $\Pi(2)$ sur la table de la loi normale.

### 9.4 Loi Normale

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ lorsqu'une variable aléatoire $X$ suit une loi normale d'espérance et de variance:

$$E(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma.$$

Lorsqu'on travaille concrètement avec des lois normales, on travaille souvent sur des tables de loi normale car cette dernière est très difficile à calculer. Or ces tables donnent des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.
Mais en pratique, nous avons affaire à des lois normales ayant des paramètres qui peuvent être bien différents. Il est alors important de savoir se ramener au cas $\mathcal{N}(0; 1)$.

**Proposition 1.** Si $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors la variable aléatoire

$$\frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

**Exemple 32.** Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calculer $F_Y(0, 5)$!