Polynômes du second degré

Nous avons vu dans les cours précédents comment étudier les équations de droites, c'est à dire les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$.

L'objectif de ce cours est d'étudier des fonctions plus générales où l'on s'autorise à avoir un terme x^2 en plus. On cherchera donc à étudier les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1 Polynôme du second degré

Définition 1. On appelle polynôme du second degré toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$P(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. Sous cette forme, on dit que P est sous sa forme développée.

Exemple 1.

- $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$
- $P(x) = x^2 + 2$
- $P(x) = 5x^2$
- $P(x) = 4x + 6$
- $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1$
- $P(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$
- $P(x) = (x + 1)^2$

2 Forme canonique

Proposition 1. Tout polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où $\alpha =$ .... et $\beta =$ .... On appelle cette expression la forme canonique de P.

Exemple 2.
- $P(x) = x^2 - 2x + 1$

- $P(x) = 2x^2 + 4x + 5$

- $P(x) = 5x^2$

3 Équation du second degré

Définition 2. On appelle racine d'un polynôme du second degré toute solution de l'équation ....

Exemple 3.
- $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$ a deux racines qui sont -0,5 et 2.

Il existe une façon générale de résoudre de telles équations, pour cela nous avons besoin de la notion de discriminant.

Définition 3. On appelle discriminant d'un polynôme du second degré $P(x) = ax^2+bx+c$ la quantité

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le nombre de racines de P dépend en fait uniquement du signe de Δ. En effet, on utilise la règle suivante pour les trouver:

Proposition 2.
- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme P ...., c'est à dire que $P(x)$ n'est jamais égal à 0.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P possède .... qui est donnée par la formule:

$$x_0 = \text{.............................}$$

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P possède .... qui sont données par les formules:

$$x_1 = \text{......................................} \text{ et } x_2 = \text{...}$$

Exemple 4.

- $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

- $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

- $P(x) = x^2 + x + 1$

4 Forme factorisée

Une fois que l'on connait les racines d'un polynôme du second degré, on peut mettre ce polynôme sous forme factorisée.

Proposition 3.

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme P ne possède aucune racine réelle et P ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P possède une seule racine réelle x_0 et on peut écrire P sous la forme suivante:

$$P(x) = \text{.....................................}$$

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P possède deux racines réelles x_1 et x_2 et on peut factoriser P comme ceci:

$$P(x) = \text{.......................................}$$

Exemple 5.

- $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

- $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

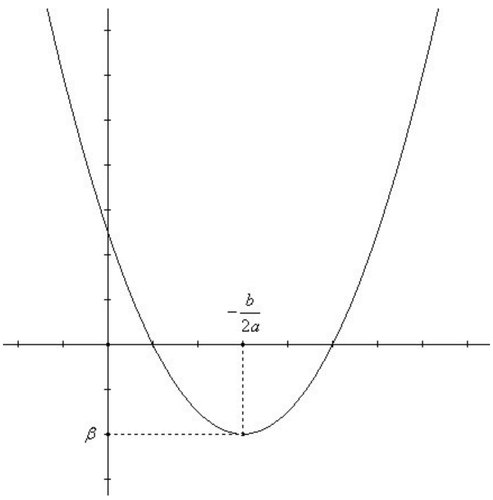
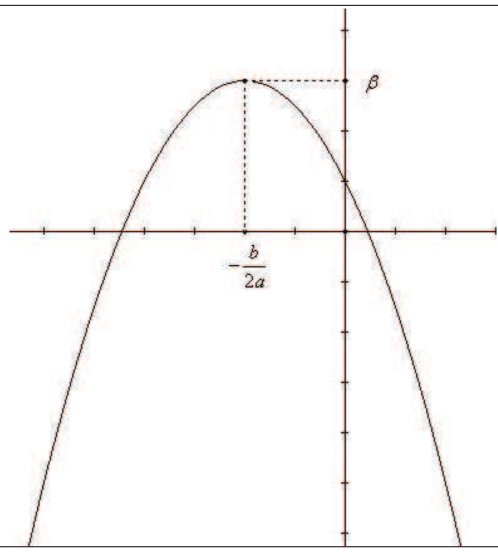
- $P(x) = x^2 + x + 1$

5 Variations d'une fonction polynôme du second degré

Les variations d'une fonction polynôme du second degré sont très faciles à étudier grâce à la forme canonique du polynôme. En fait, il existe deux situations différentes en fonctions du signe de a.

• $a > 0$, alors la courbe représentative de f est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut. Le minimum de cette fonction est alors atteint en $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et vaut $P(\alpha)$.

• $a < 0$, alors la courbe représentative de f est une parabole dont les branches sont tournées vers le bas. Le maximum de cette fonction est alors atteint en $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et vaut $P(\alpha)$.

<table>
<tr><td></td><td>$a > 0$</td><td>$a < 0$</td></tr>
<tr><td>Tableau de variations de f</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td><td>
β</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>β
</td><td>$\searrow$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Courbe représentative de f</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

On remarque que la courbe représentative d'une fonction du second degré est toujours symétrique par rapport à la droite verticale ....

Exemple 6.

- $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

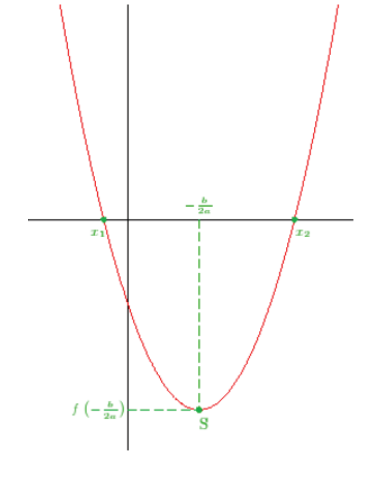
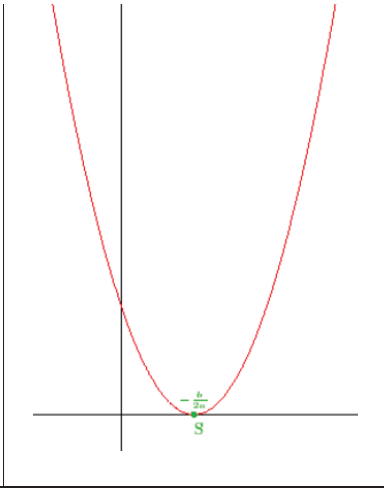
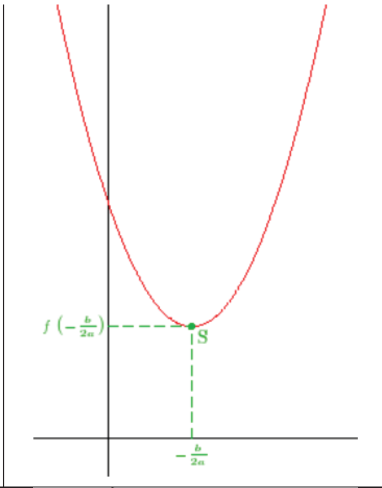
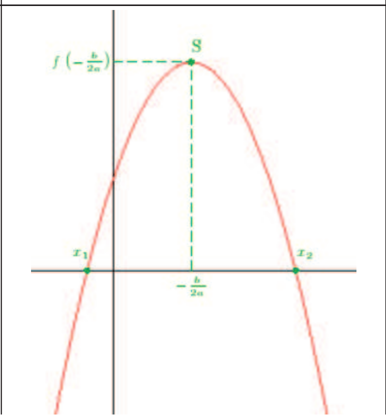
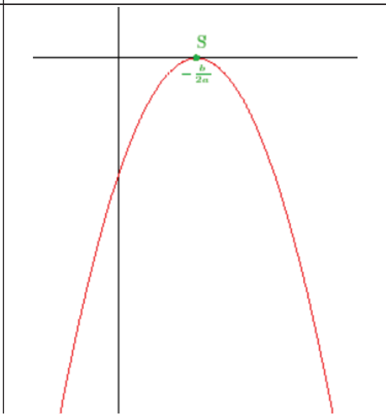
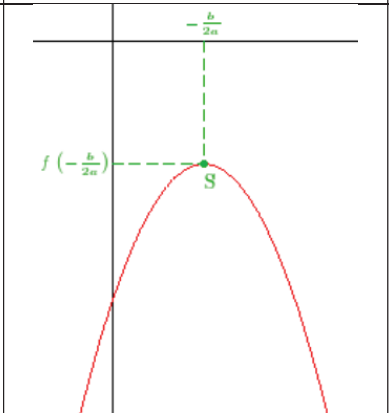
- $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

- $P(x) = x^2 + x + 1$

6 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Proposition 4. Soit f une fonction polynôme d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors f est toujours du signe de ....
- Si $\Delta = 0$, alors f est toujours du signe de .... et s'annule en ....
- Si $\Delta > 0$, alors f est du signe contraire de .... entre ses deux racines et est du signe de .... en dehors des racines.

$a > 0$			
$a < 0$			

Exemple 7.

- $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

- $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

- $P(x) = x^2 + x + 1$

Exemple 8.

- $P(x) = x^2 + 4x - 5$

- $P(x) = -2x^2 + x - 4$